Umkehrfunktionen

Bestimmung einer Umkehrfunktion

Musterbeispiel

Datei-Nr. 11 320

13. September 2025

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik
und Studium

https://mathe-cd.de

DEMO

Vorwort

Zum Thema Umkehrfunktionen gibt es für die Klassenstufe 10 bereits drei Texte;

18110	**Umkehrfunktionen 1**	Viele Beispiele zur Berechnung von Umkehrfunktionen. Monotonie-Untersuchung nicht mit der Ableitung. Keine Ableitung der Umkehrfunktion. Für die meisten Zwecke ausreichend.
18111	**Umkehrfunktionen 2**	Aufgabensammlung zu 18110
18112	**Umkehrfunktionen 3**	Prüfungsaufgaben zu 18110. Einig[illegible] dieses Textes werden hier auf höherem Niveau behandelt.

In vorliegendem für die Oberstufe geschriebenen Text wird die Monotonie mit der Ableitung[illegible]funktion behandelt. Bei manchen Umkehrfunktionen wird die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel berechnet.

Inhalt

Zuerst eine methodische Übersicht:
Ablaufplan zur Entscheidung: Ist eine Funktion umkehrbar 3

1 Wiederholung der Grundlagen aus [illegible] 4

2 Sammlung von Musterbeispielen für Umkehrfunktionen

2.1 Wurzelfunktionen $f(x)=2\sqrt{[illegible]3}$, $f(x)=[illegible]\sqrt{5-x}$, $f(x)=\frac{8}{\sqrt{x}}$ 7

2.2 Exponentialfunktionen $f(x)=2^x-3$, $f(x)=2-e^{1-x}$, $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}$, $f(x)=\frac{2e^x}{e^x-1}$ 10

2.3 Gebrochen rationale Funktionen $f(x)=\frac{x}{x-2}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{8}{x^2+1}$ 15

2.4 Logarithmusfunktionen: $f(x)=\ln(8-x)$, $f(x)=\ln\frac{x+2}{3-x}$, $f(x)=\ln\frac{2x-4}{x+2}$, $f(x)=\ln\left(4x-x^2\right)$ 18

2.5 Trigonometrische Funktionen: $f(x)=\sin(x)$, $f(x)=\cos(x)$, $f(x)=\tan(x)$ 23
(Sie führen zu Arkusfunktionen)

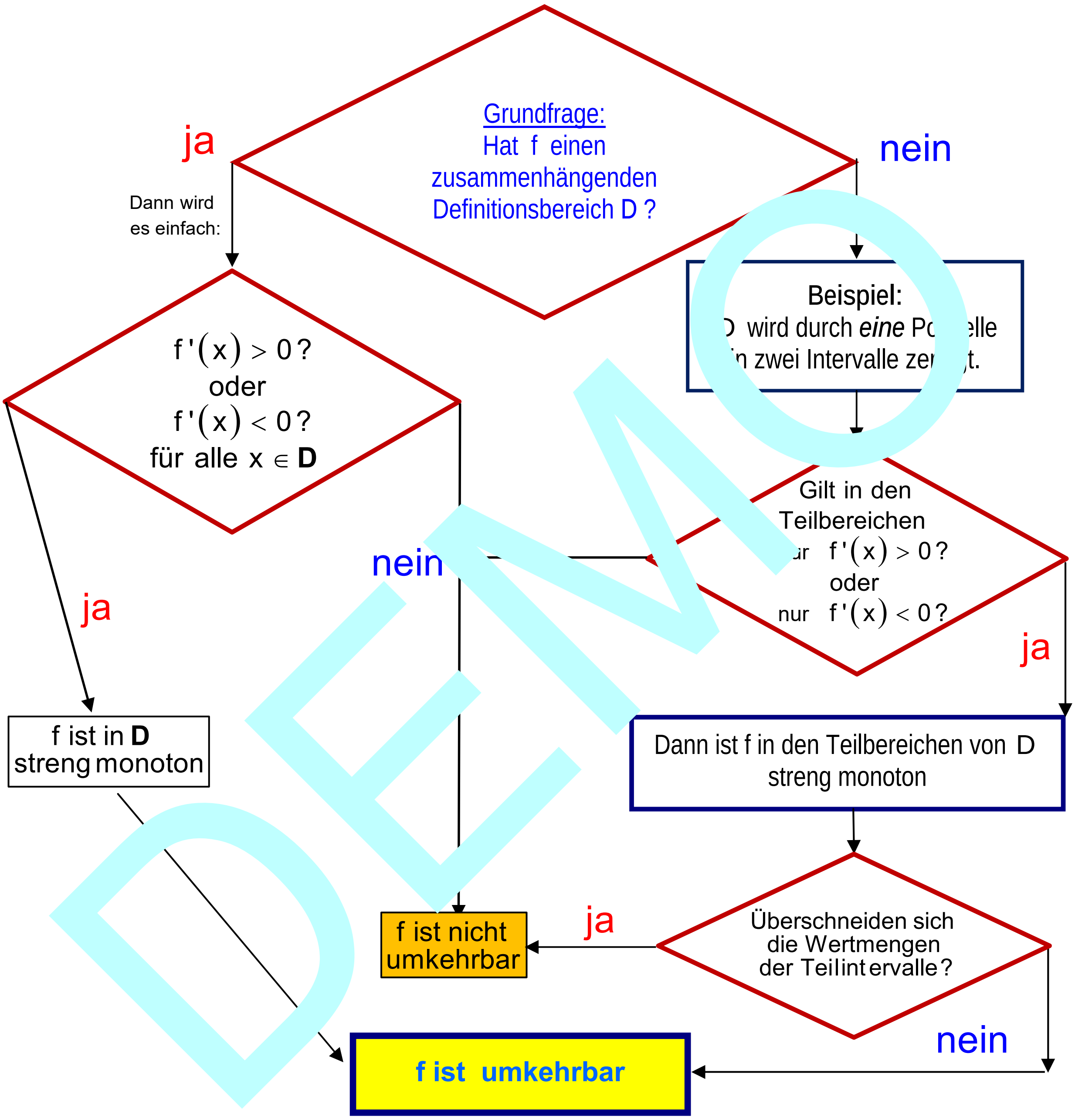
2.6 Hyperbolische Funktionen: $f(x)=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $f(x)=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
$f(x)=\tanh(x):=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 28
(Sie führen zu Area-Funktionen)

Aufgabensammlung: 34

DEMO

Methodische Übersicht

Ablaufplan: **Ist eine Funktion umkehrbar?**



DEMO

1. Wenn also der Definitionsbereich <u>zusammenhängend</u> ist, folgt aus $f'(x) > 0$ (< 0) in **D**, dass f in **D** streng monoton wächst (fällt).

   Dann besitzt f eine Umkehrfunktion.

2. Wenn der Definitionsbereich aus getrennten Teilintervallen besteht und die Rechnung $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ ergibt, dann ist f in diesen Teilintervallen streng monoton.

   Die Funktion f ist jedoch nur dann umkehrbar, wenn die Wertmengen der Teilintervalle sich nicht überschneiden.

1 Wiederholung der Grundlagen aus 18110

(1) Eine Funktion soll jeder Zahl ihres Definitionsbereichs genau eine Zahl (man nennt sie den Funktionswert) zuordnen. Entscheidend dabei ist die Eindeutigkeit der Zuordnung. Eine Situation wie die rechts abgebildete kann also bei einer Funktion nie vorkommen.

$$\begin{tikzcd} & 4 \\ 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & -4 \end{tikzcd}$$

Es kann also bei einer Funktion nie passieren, dass bei der Berechnung des Funktionswerts zwei verschiedene Ergebnisse entstehen, etwa einmal $f(2)=4$ und das andere Mal $f(2)=-4$.

(2) Bei vielen Prozessen ist es wichtig, dass man den Rechenweg u[illegible] [illegible] so dass man ausgehend vom Ergebnis (also vom Funktionswert) rückwärts [illegible] ursprüngliche [illegible] wiederfindet. Doch nicht jede Funktion lässt sich umkehren.

Die *Quadratfunktion* f mit $f(x)=x^2$ liefert als Funktion eindeu[illegible] Ergebnisse, darunter auch diese beiden: $f(2$ [illegible] nd $f(-$ [illegible] 4 .

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[dr] & \\ & 4 \\ -2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dies verletzt NICHT die Eindeutigkeit der Zuordnunge[illegible] sow[illegible] der Zahl 2 wie auch der Zahl -2 wird eindeutig ein Ergebnis zug[illegible] Wollten wir j[illegible]och die[illegible] Funktion umkehren, dann müssten wir der Zahl 4 zwei Ergebnis[illegible] [illegible] $g(4)$ [illegible] 2 und $g(4)=-2$

$$\begin{tikzcd} & 2 \\ 4 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & -2 \end{tikzcd}$$

Die Umkehrung der Q[illegible]atfunktion f ist [illegible] keine Fu[illegible]tion mehr.

Man erkennt auch [illegible]ort die Ursa[illegible] der Nicht-U[illegible]rbarkeit:

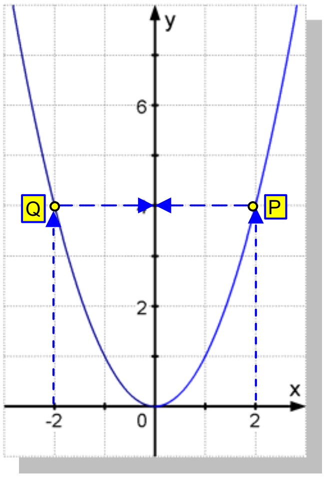
> ***Gibt es bei ein[illegible] [illegible]on zwei Zah[illegible] mit dem gleichen Funktionswert, d[illegible] [illegible]ie Funkt[illegible] nicht umk[illegible]bar.***

[illegible] *positiv* ausgedr[illegible]:

> Gibt es bei einer [illegible]ktion keine zwei Zahlen mit gleichem Funktionswert, [illegible] ist die Fun[illegible] umkehrbar.

DEMO

(3) Die Aussage[illegible] [illegible]2) lassen sich sehr schön geometrisch veranschaulichen. Die beiden Zuordnungen der Quadratfunktion $f(2)=4$ und $f(-2)=4$ gehören zu zwei Parabelpunkten $P(2\,|\,4)$ und $Q(-2\,|\,4)$.



Sie haben dieselbe y-Koordinate, liegen also „auf gleicher Höhe“, d. h. auf einer Parallelen zur x-Achse.

Die Gerade y = 4 schneidet die Parabel zweimal, in P und Q.
Daher kann man die Parabelfunktion nicht umkehren.

(4) Dies kann man verallgemeinern:

Wird ein Schaubild einer Funktion von einer Parallelen zur x-Achse zweimal geschnitten (dann besitzen diese Schnittpunkte die gleichen y-Koordinaten), dann ist die zugehörige Funktion nicht umkehrbar.

(5) **Wie sieht eine Situation aus, in der dies sicher nicht eintreten wird?**

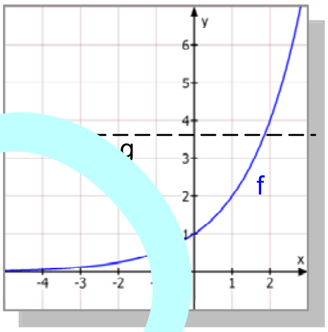
Schauen wir uns dazu diese Kurve an:

Sie ist das Schaubild der Funktion $f(x) = 2^x$.

Man kann sich fragen, warum hier eine horizontale Gerade g die Kurve nur einmal schneidet? Die Antwort muss heißen:

Weil die Kurve nach rechts immer weiter steigt.

(Denn wenn x zunimmt, dann wird auch die Potenz 2^x größe[illegible]



Die mathematische Fachsprache formuliert diesen [illegible]achverha[illegible] [illegible]o:

Wenn aus $\boxed{x_1 < x_2}$ folgt $\boxed{f(x_1) < f(x_2)}$ [illegible]

dann heißt die Funktion streng monoto[illegible] wac[illegible]nd (steigend).

Schüler verstehen diese Ungleichung[illegible] [illegible]tte [illegible]ht (rich[illegible]). Was [illegible]edeutet der Satz:

„Wenn a[illegible] $\boxed{x_1 < x_2}$ fo[illegible] $\boxed{f(x_1) <}$ [illegible] dann …“

Man stelle sich zwei [illegible]len vor mit [illegible] $< x_2$ (x_1 li[illegible] von x_2), etwa $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$: 1 < 3

Für ihre Funktionsw[illegible] $f(1) =$ [illegible] 2 und $f(3) = 2^3 = 8$ gilt $f(1) < f(3)$ also $f(x_1) < f(x_2)$.

Oder bildlich gesproch[illegible] [illegible]n Punkt $P_1(1|$[illegible] geht man nach rechts zu $Q(3|8)$.

Q liegt [illegible] rechts, a[illegible] höher, w[illegible] $(1) < f(3)$ gilt.

Di[illegible] Ungleichungs[illegible]e ist als[illegible] [illegible]athematische Formulierung dafür, dass die [illegible]rve nach rechts steig[illegible] [illegible]lso dass die Funktionswerte nach rechts zunehmen.

Man [illegible] sich also:

Wen[illegible] [illegible]ne [illegible]ktion streng monoton steigt, dann ist sie umkehrbar.

DEMO

Kleine Denkaufgabe:

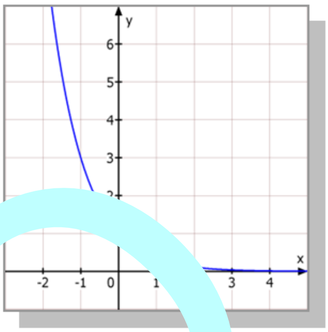
Wie kann man dann durch Ungleichungen beschreiben, dass die Kurve nach rechts fällt, dass die Funktionswerte nach rechts abnehmen?

Antwort: Die erste Ungleichung muss lauten: $\boxed{x_1 < x_2}$

Sie besagt, dass die Stelle x_1 links von x_2 liegt.

Die nächste Ungleichung soll jetzt beschreiben, dass die Funktionswerte nach rechts abnehmen. Also muss der linke Funktionswert größer als der rechte sein: $\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$

Beispiel:



Die zugrunde liegende Funktion ist $f(x) = \frac{1}{3^x}$,

was man auch so schreiben kann: $f(x) = 3^{-x}$.

Man sieht sofort, dass die Kurve fällt, dass die Funktionswerte nach rechts abnehmen.

Diese Funktion fällt streng monoton.

In höheren Klassen und vor allem der Oberstufe muss man das beweisen können.

Hier geht das noch ganz einfach:

Zur größeren Zahl gehört auch die höhere Potenz [illegible] der Basis.

Wenn $x_1 < x_2$ ist, dann ist $3^{x_1} < 3^{x_2}$.

Davon nehmen wir den Kehrwert [illegible]

Dabei wird aus größer kleiner ([illegible] 2 < [illegible] folgt $\frac{1}{2}$ [illegible] $\frac{1}{4}$).

Also folgt aus $3^{x_1} <$ [illegible] die Ungleichung $\frac{1}{3^{x_1}} > \frac{1}{3^{x_2}}$

Oft werden Lehrer [illegible] mit zufrieden sein, wenn man am Schaubild erkennt, dass diese Funktion streng monoton fällt und dass daher die Funktion eine Umkehrfunktion besitzt.

Fassen wir zusammen:

Wenn eine Funktion streng monoton wächst oder fällt, dann ist sie umkehrbar.

(6) Nun kann es passieren, dass eine Funktion in einem Teilbereich fällt, in einem anderen steigt, so wie das [illegible] Parabelfunktion $f(x) = x^2$ macht.

Dann muss man den Definitionsbereich so zerlegen, dass in den einzelnen Abschnitten streng monotones Abnehmen oder Zunehmen garantiert ist.

In diesen Abschnitten gibt es dann Umkehrfunktionen.

Das habe ich sehr ausführlich im Text 18110 auf den Seiten 11 bis 13 ausgeführt.

Daher steht das hier nicht noch einmal. Bei Bedarf dort bitte nachlesen!´

Dort kann man auch viele Beispiele zu Umkehrfunktionen studieren.

DEMO

DEMO

2 Sammlung von Musterbeispielen für Umkehrfunktionen

2.1 Wurzelfunktionen

Beispiel 1: $f(x) = 2\sqrt{x+3}$

(1) Existenz einer Umkehrfunktion:

Definitionsbereich: $x+3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -3$ also $\mathbf{D}_f = [-3\,;\infty\,[$

Ableitung: $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

Monotonie: Da für alle $x > -3$ gilt: $f'(x) > 0$, wäch[illegible] [illegible]noton.

Wertmenge: $\mathbf{W}_f = \mathbb{R}^+ = \,]\,0\,;\infty\,[$

Also besitzt f eine Umkehrfunktion.

(2) Berechnung der Umkehrfunktion:

$$y = 2\sqrt{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 4\cdot(x+3) \quad \Leftrightarrow \quad [illegible]\,y\,[illegible]\,x+3 \quad [illegible] = \tfrac{1}{4}y^2$$

Das ist bereits die Umkehrfunktion, denn sie ordnet je[illegible]em y [illegible] x zu.

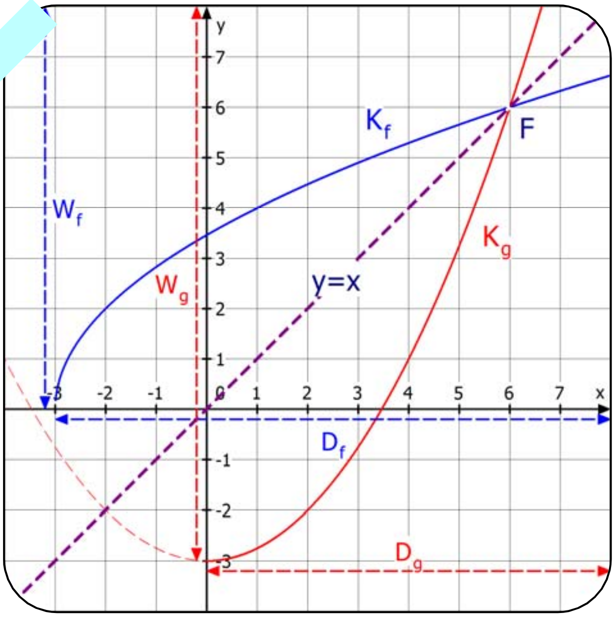
Für die übliche Darstellung werden [illegible] y vertauscht:

$$y = \tfrac{1}{4}x^2 - 3 \qquad \text{bzw.} \qquad g(x\,[illegible]\,\tfrac{1}{4}x^2 - 3$$

Durch die Umkehrung wird [illegible] Wertebere[illegible] von f zum [illegible]ionsbereich von g und der Definitionsber[illegible] von f zum Wertebe[illegible] von g:

$$\mathbf{D}_g = [illegible] = \mathbb{R}^+ = \,]\,0\,;[illegible] \quad \text{und} \quad \mathbf{W}_g = [illegible] = [-3\,;\infty\,[\,.$$

(3) Schaubilder:



Man erk[illegible] [illegible]s K_g das [illegible]gelbild vo[illegible] K_f i[illegible] [illegible]ine Folge d[illegible] [illegible]ertausc[illegible] [illegible] [illegible]nd y. Beide Kurven [illegible]neiden s[illegible]n a[illegible] [illegible]er Spiegelungsach[illegible] [illegible]m Fixpunkt F.

Man [illegible]nnt auch, das[illegible] [illegible]an für die Umkehr[illegible]ion nich[illegible] [illegible]en „natürlichen“ Definitionsbe[illegible] [illegible]er Funktion g nehmen darf, der bei einer ganzrationalen Funktion $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ ist.

Vielmehr muss man ihn so einschränken, dass er mit der Wertmenge von f identisch ist.

Beispiel 2: $f(x) = 3 - \sqrt{5 - x}$

DEMO

2.2 Exponentialfunktionen

Beispiel 4: $f(x) = 2^x - 3$

DEMO

Beispiel 5: $f(x) = 2 - e^{1-x}$

(1) Existenz einer Umkehrfunktion:

Definitionsbereich: $\mathbf{D}_f = \mathbb{R}$

Ableitung: $f'(x) = -e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}$

Monotonie: Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) > 0$, steigt f streng monoton.

Also besitzt f eine Umkehrfunktion.

Wertmenge: $\mathbf{W}_f = \left]-\infty\,;2\right[$

(2) Berechnung der Umkehrfunktion:

Gegeben: $y = 2 - e^{1-x}$

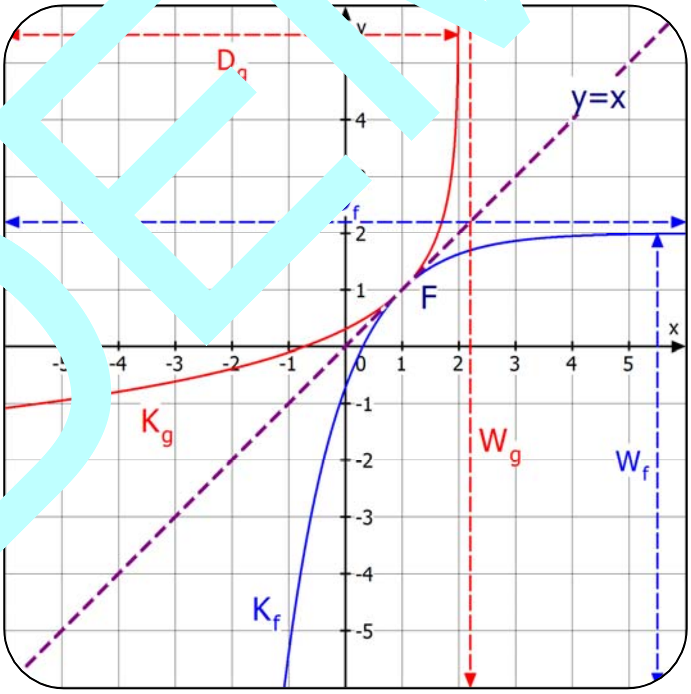
Umstellen nach x: $e^{1-x} = 2 - y \Leftrightarrow 1 - x = \ln(2 - y)$

Umkehrfunktion: $x = g(y) = 1 - \ln(2 - y)$

Vertauschung x mit y: $y = g(x) = 1 - \ln(2 - x)$

mit $\mathbf{D}_g = \mathbf{W}_f$ [illegible] $2\,[$ und $\mathbf{W}_g$ [illegible] $\mathbf{D}_f = \mathbb{R}$

(3) Schaubilder:



DEMO

Beispiel 6: $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}$

DEMO

Beispiel 7: $f(x)=\frac{2e^x}{e^x-1}$ *(Schwierige Problematik)*

DEMO

2.3 Gebrochen rationale Funktionen

Beispiel 8: $f(x)=\frac{x}{x-2}$ *(Schwierige Problematik)*

DEMO

Beispiel 9: $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ **bzw.** $f(x)=x-\frac{1}{x}=x-x^{-1}$ *(Schwierig)*

DEMO

Beispiel 10: $f(x)=\frac{8}{x^2+1}$ *(Schwierige Problematik)*

DEMO

2.4 Logarithmusfunktionen

Beispiel 11: $f(x) = \ln(8 - x)$

DEMO

Beispiel 12: $f(x)=\ln\frac{x+2}{3-x}$

(1) Existenz einer Umkehrfunktion:

Definitionsbereich: Bed.: Argument > 0. Da das Vorzeichen des Bruches vom Zähler und vom Nenner abhängt, erstelle ich eine Vorzeichentabelle:

Ergebnis:

$\mathbf{D}=\left]-2;3\right[$

-2 ist auszuschließen, weil ln 0 nicht existiert,

		-2		3	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
Bruch	$-$	0	$+$	∞	$-$

Ableitung:

Formel: $f(x)=\ln(u(x)) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{u}\cdot u'$

Ausführung: $f'(x)=\frac{1}{\frac{x+2}{3-x}}\cdot\frac{1\cdot(3-x)-(-1)\cdot(x+2)}{(3}$ [illegible] $\frac{3-x}{\ldots 2}\cdot\frac{5}{(3-x)^2}=\frac{5}{(\ldots 2)(3-x)}$

Die Vorzeichentabelle hilft auch hier weiter. Sie zeig[illegible] [illegible]ss die b[illegible]mern im Definitionsbereich $\mathbf{D}=\left]-2;3\right[$ positive Werte liefer[illegible] Also [illegible]m zusammenhängenden Definitionsbereich $f'(x)>0$. Also [illegible]ort f streng [illegible]noton.

Grenzwerte: Für $x\to-2$ [illegible] Br[illegible] $0 \Rightarrow \ln(\text{Bruch})\to-\infty$

F[illegible] $\to 3 \Rightarrow$ [illegible]ch $\to\infty$ [illegible] $(\text{Bruch})\to\infty$

Also wächst f in D von [illegible] bis ∞ streng mon[illegible] mit $\mathbf{W}_f=\mathbb{R}$

f ist umkehrbar.

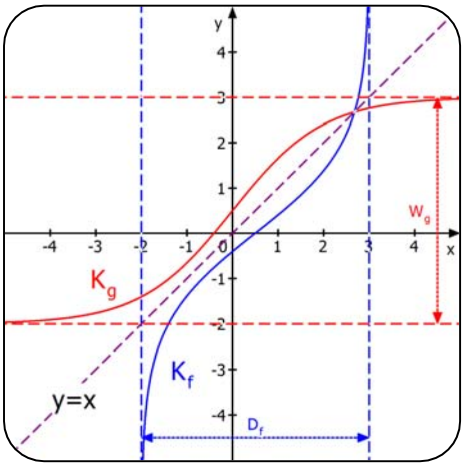
(2) Berechnung der Umk[illegible]:

Gege[illegible] y [illegible] $\frac{x+2}{\ldots x}$

[illegible]stellen nach x: $e^y=\frac{x\ldots}{3-x} \Leftrightarrow (3-x)e^y=x+2 \Leftrightarrow 3e^y-2=x+x\cdot e^y$

x au[illegible]mmern: $\ldots(1+e^y)=3e^y-2 \Rightarrow x=\frac{3e^y-2}{1+e^y}$ (Umkehrfunktion)

x, y vertausc[illegible] $y=g(x)=\frac{3e^x-2}{e^x+1}$



Übertragung von Eigenschaften von f auf g:

Durch die Vertauschung von x und y folgt:

Aus $\mathbf{W}_f=\mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{D}_g=\mathbb{R}$

und aus $\mathbf{D}_f=\left]-2;3\right[\Rightarrow \mathbf{W}_g=\left]-2;3\right[$

Zusatzaufgabe: Beweise, dass K_f punktsymmetrisch ist. Lösung im Anhang.

Beispiel 13: $f(x) = \ln\frac{2x-4}{x+2}$ (Schwer!)

DEMO

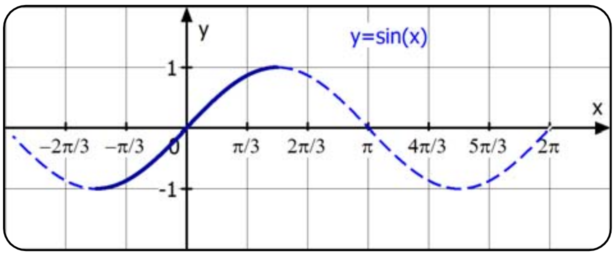
Beispiel 14: $f(x) = \ln\left(4x - x^2\right)$ (Schwer!)

DEMO

2.5 Umkehrfunktionen und deren Ableitungen: Trigonometrische Funktionen

Ihre Umkehrfunktionen heißen Arkusfunktionen. Sie werden in den Texten ab 47301 ausführlich behandelt.

Beispiel 15: $f(x)=\sin(x)$



Um f umkehren zu können, muss man den Definitionsbereich auf ein Intervall beschränken, in dem f streng monoton steigt oder fällt.

Hier bietet es sich an, dass man als Definitionsbereich $\mathbf{D_f} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ wä enmaß.
Die zugehörige Wertmenge ist dann $\mathbf{D_f} = [\,-1;1\,]$.

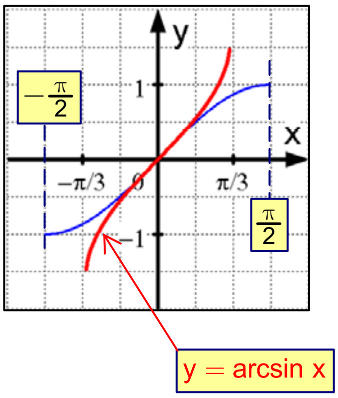
Herstellung der Umkehrfunktion „A ussinus“:

$\mathbf{y=\sin(x)}$ wird nach x umgestellt. Das hreibt n so auf:

$$\mathbf{x=\arcsin(y)}$$

Damit die freie Variable wie üblich x heiß ve uscht man noch x und y.
Dann lautet die Gleichung d Umkehrfun on: $\mathbf{= g(x) = \arcsin(x)}$

Diese Vertauschung von x un bed t fü den Graphen eine Spiegelung an y = x



Damit geht der Definitio ber n der Sinus ktion in den Werteb ich der F ion arcsin über, und der W tebere on y = (x) d zum Defini sbereich von arcsin(.

$f(x)=\sin($ hat $\mathbf{D}=\left[-\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi\right]$ und $\mathbf{W}=[-1;1]$:

$g(x)=\arcsin(x)$ hat $\mathbf{D}=[-1;1]$ und $W=\left[-\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi\right]$

Mehr Details dazu siehe Text 47301.

DEMO

Problem: Wie berechnet man die Ableitung der Umkehrfunktion?

Die jetzt gezeigte Methode verwendet die Kettenregel

1. Schritt: Stelle die Funktionsgleichung $y = \arcsin(x)$ nach x um:

$$y = \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad x = \sin(y)$$

2. Schritt: Leite nach x ab: (Rechts die Kettenregel anwenden!)

$$1 = \cos(y) \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos(y)}$$

3. Schritt: Rechne auf sin(y) um: $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1 \quad \Rightarrow$ [illegible] $s(y) = \pm\sqrt{\text{[illegible]} in^2(y)}$

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2(y)}}$$

4. Schritt: Ersetze wieder sin(y) durch x: $y' = c$ [illegible] $) = \frac{\text{[illegible]}}{\pm\sqrt{1-\text{[illegible]}}}$

5. Schritt: Weil g steigt, scheidet das Minuszeich[illegible] a[illegible]

Ergebnis: $g(x) = \text{arcx}\sin(x) \quad \Rightarrow$ [illegible] $(x) = \frac{1}{\text{[illegible]}\sqrt{1-x^2}}$

Eine andere Metho[illegible] wird im Te[illegible] 125 gezeigt, [illegible]nd zwar die Kehrwertformel.

Sie sei kurz angedeutet und la[illegible] $g'(y) = \frac{1}{f'\text{[illegible]}}$ [illegible] bezogen auf die Variable y der Umkehrfunktion.

Und man v[illegible]ndet si[illegible]

Zunächst ist [illegible] y = sin(x) [illegible]nd $f'(x) = \cos(x)$

[illegible]nn folgt: $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$

Nun s[illegible] y umrechnen: $\sin(x) = y$, also: $\boxed{g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$

Jetzt kann man ja y wieder in x umbenennen…..

DEMO

Beispiel 16: $f(x)=\cos(x)$ **Mehr Details dazu siehe Text 47301.**

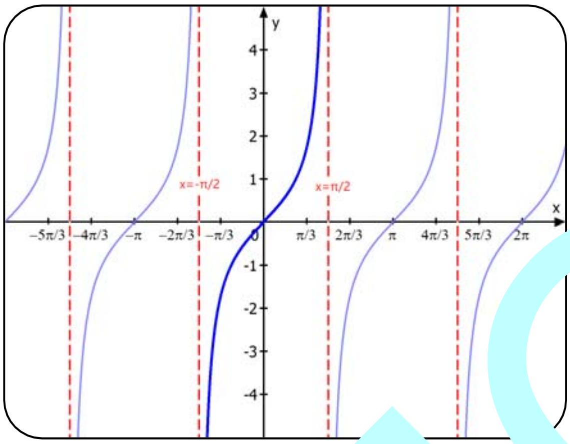
DEMO

Beispiel 17: $f(x) = \tan(x)$

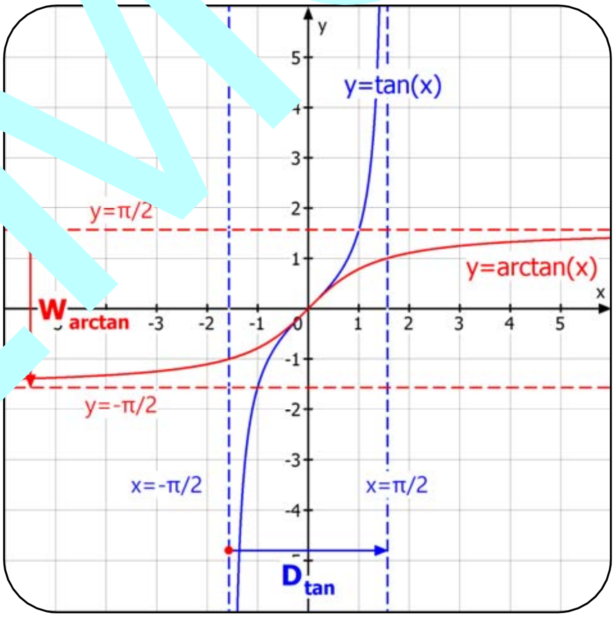
Mehr Details dazu siehe Text 47301.

f hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ und verwendet x im Bogenmaß.

Ausgeschlossen sind also die ungeradzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, an denen f Polstellen hat.



Die Funktion ist zunächst nicht umkehrbar. Damit sie un[illegible] [illegible]r wird, [illegible]änkt man sie [illegible]st auf den Definitionsbereich $D = \left] -\frac{1}{2}\pi , \frac{1}{2}\pi \right[$ ein, in ihm steigt die [illegible] [illegible]sfunktio[illegible] [illegible] [illegible]on.



Umstellen nach x: $y = \tan x \Rightarrow x = \arctan y$

Vertauschung von x und y:

$$y = g(x) = \arctan(x)$$

mit $D_g = \mathbb{R} = W_f$ und $W_g =]$ [illegible] $; \frac{\pi}{2}[= D_f$

Die Tangenskurve hat die s[illegible]echten Asymptoten $x = \frac{1}{2}\pi$ un[illegible] [illegible]$ = -\frac{1}{2}\pi$. Al[illegible]

Die Arcustangenskurve ha[illegible] waa[illegible]echten Asymptoten $y = \frac{1}{2}\pi$ und $y = -$[illegible]

$\lim\limits_{x \to}$ [illegible] $\text{an}(x) =$ [illegible]

[illegible]m $\arctan(x) = -\frac{1}{2}\pi$

Finden vo[illegible] [illegible]nktionswerte[illegible]

Aus	$\tan$[illegible] $= 0$	folgt:	$\arctan(0) = 0$
Aus	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ [illegible]	folgt	$\arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$
Aus	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$	folgt	$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
Aus	$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$	folgt	$\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

Die Kurve y = arctan(x) ist ***punktsymmetrisch zum Ursprung***, denn es gilt: arctan(-x) = - arctan(x).

Also ist z. B. $\arctan\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$ usw.

Weil f und g Umkehrfunktionen voneinander sind, gilt:

$\arctan(\tan(x)) = x$ für $x \in \left] -\frac{1}{2}\pi ; \frac{1}{2}\pi \right[$ und:

$\tan(\arctan(x)) = x$ für $x \in \mathbb{R}$

DEMO

Berechnung der Ableitungsfunktion:

Zuerst nach x umstellen: $y = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad x = \tan(y)$

Ableiten mit der Kettenregel: $1 = \left(1 + \tan^2 y\right) \cdot y'$

Umstellen nach y': $y' = \dfrac{1}{1 + \tan^2(y)}$

tan(y) durch x ersetzen: $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Ergebnis: $\boxed{g(x) = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}}$

Hinweis auf die Integration:

Daraus folgt, dass die Funktion arctan Stammfunktion der gebroch[illegible] rationalen Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ ist. Also kann man so integrieren:

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + C}$$

Dazu gibt es sehr viele Integralanwendunge[illegible] Te[illegible]055.

DEMO

2.6 Hyperbolische Funktionen

Diese Funktionen werden im Text 51101 ausführlich behandelt.

Beispiel 18

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

DEMO

Beispiel 19

$$f(x)=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

DEMO

Beispiel 20

$$f(x) = \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

DEMO

Aufgaben

Aufgabe 1: $f(x) = e^{2x} + 2 \cdot e^x$

a) Bestimme das Monotonieverhalten von f. Warum ist f umkehrbar?
Bestimme die die Wertmenge von f.

b) Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion g zu f. Gib ihren Definitionsbereich und ihre Wertmenge an.

c) Zeichne die Schaubilder von f und g in eine gemeinsames Achsenkreuz.

d) Bestimme die 1. Ableitung von g.

Aufgabe 2: $f_t(x) = \frac{3t}{e^x + t}$ für t > 0

a) Bestimme das Monotonieverhalten von f_t. Warum ist f_t umkehrbar?
Bestimme die Asymptoten von K_f und die Wertmenge von f_t.

b) Zeichne das Schaubild von f_2.

c) Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion g_t zu f_t. Gib ihren Definitionsbereich und ihre Wertmenge an. Ergänze das Schaubild K_g im vorhandenen Achsenkreuz.

d) Bestimme die 1. Ableitung von g_t.

Hinweis: Weitere Zusatzaufgaben zu dieser Funktion findet man im Text 45130 Seite 25 bis 31.

Aufgabe 3: $f(x) = \frac{2}{3e^x - 1}$ für x > 0

a) Bestimme das Monotonieverhalten von f. Warum ist f umkehrbar?
Bestimme die Asymptoten von K_f und die Wertmenge von f.

b) Zeichne das Schaubild von f.

c) Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion g zu f. Gib ihren Definitionsbereich und ihre Wertmenge an.

d) Bestimme die 1. Ableitung von g.

Hinweis: Weitere Zusatzaufgaben zu dieser Funktion findet man im Text 45130 Seite 36 bis 38.

Aufgabe 4: $f_t(x) = 4 - \frac{5t}{e^{2x} + 1}$ für t > 0

a) Bestimme das Monotonieverhalten von f_t. Ist f_t umkehrbar?
Bestimme die Asymptoten von K_f und die Wertmenge von f_t.

b) Zeichne das Schaubild von f_1.

c) Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion g_1 zu f_1. Gib ihren Definitionsbereich und ihre Wertmenge an. Ergänze das Schaubild K_g im vorhandenen Achsenkreuz.

d) Bestimme die 1. Ableitung von g_1.

Hinweis: Weitere Zusatzaufgaben zu dieser Funktion findet man im Text 45130 Seite 32 bis 35.

DEMO

Aufgabe 5: $f_t(x) = \frac{2e^x - t^2}{e^x + t}$ für t > 0

a) Bestimme das Monotonieverhalten von f_t. Warum ist f_t umkehrbar?
Bestimme die Asymptoten von K_f und die Wertmenge von f_t.

b) Zeichne das Schaubild von f_2.

c) Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion g_t zu f_t. Gib ihren Definitionsbereich und ihre Wertmenge an. Ergänze das Schaubild durch den Graphen von g_2.

d) Bestimme die 1. Ableitung von g_t.

Hinweis: Weitere Zusatzaufgaben zu dieser Funktion findet man im Text 45130 Seite 20 bis 24.

Aufgabe 6: $f(x) = \frac{4}{\sqrt{1+e^x}}$

a) Bestimme das Monotonieverhalten von f. Warum ist f umkehrbar?
Bestimme die Asymptoten von K_f und die Wertmenge von f.

b) Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion g zu f. Gib ihren Definitionsbereich und ihre Wertmenge an.

c) Zeichne die Schaubilder von f und g in ein gemeinsames Achsenkreuz.

d) Bestimme die 1. Ableitung von g.

Hinweis: Weitere Zusatzaufgaben zu dieser Funktion findet man im Text 45130 Seite 51 bis 55.

Aufgabe 7: $f(x) = \ln\frac{e^x - 1}{e^x + 4}$

a) Bestimme das Monotonieverhalten von f. Warum ist f umkehrbar?
Bestimme die Asymptoten von K_f und die Wertmenge von f.

b) Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion g zu f. Gib ihren Definitionsbereich und ihre Wertmenge an.

c) Zeichne die Schaubilder von f und g in ein gemeinsames Achsenkreuz.

d) Bestimme die 1. Ableitung von g.

Aufgabe 8: $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + 2x + \frac{3}{2}$

a) Zeige, dass f umkehrbar ist. Gib den Definitionsbereich der Umkehrfunktion g an,
ihre Nullstelle **ohne deren Funktionsterm aufzustellen.**

b) Berechne die Ableitung der Umkehrfunktion g ohne deren Funktionsterm aufzustellen.
Welchen Wert hat g' an der Nullstelle von g?

Die Lösungen stehen im Text 41321.

DEMO